

# REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO, SOFTWARE MATHEMATICA Y HABILIDADES MATEMÁTICAS Y DIGITALES

*Favieri, Adriana*

adriana.favieri@gmail.com

Universidad Tecnológica Nacional

## Resumen

El diseño de actividades de enseñanza aprendizaje en el cual se utiliza software matemático y enfocado al desarrollo de habilidades matemáticas y digitales, es una tarea docente esencial y necesita tanto de conocimientos matemáticos, del software y sobre las habilidades matemáticas. En este trabajo se presenta el diseño de actividades con estas características sobre el tema: regiones en el plano complejo. Se muestran las actividades, su relación con las habilidades matemáticas y digitales y las evidencias de las mismas en el software. Se concluye sobre la tarea docente necesaria para estos diseños, el conocimiento sobre el software y sobre las habilidades matemáticas y digitales.

**Palabras claves:** actividades enseñanza aprendizaje – software  
Mathematica – habilidades matemáticas y digitales

## Abstract

The design of learning teaching activities in which mathematical software is used and focused on the development of mathematical and digital skills, is an essential teaching task and requires both mathematical, software and mathematical skills knowledge. This paper presents the design of activities with these characteristics on the theme: regions in the complex plane. The

activities, their relation to mathematical and digital skills and their evidence in the software are shown. It concludes on the teaching task necessary for these designs, the knowledge about software and mathematical and digital skills.

## Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo, que pretende explorar el desarrollo de habilidades matemáticas y digitales relacionadas con el tema flujo potencial de fluidos cuando en el proceso de enseñanza aprendizaje se utiliza software matemático. La posibilidad de que alumnos de la carrera ingeniería aeronáutica incorporen en sus actividades de enseñanza aprendizaje herramientas tecnológicas, software especializados, constituye una experiencia indispensable ya que las mismas estarán presentes en su futuro ámbito laboral.

Como parte de las actividades de desarrollo de dicho proyecto se diseñaron actividades para la enseñanza. Dado que el tema flujo potencial es una aplicación de las funciones analíticas de variable compleja, se decidió incorporar el uso del software desde las primeras clases en la que se presenta el tema números complejos, con énfasis en las regiones en el plano complejo, que tienen relación con las usadas en flujo potencial. En esta ocasión se muestra el diseño de las actividades sobre regiones en el plano complejo, incorporando el uso del software Mathematica, señalando las habilidades matemáticas y digitales que se pondrían en juego, justificándolas a través del uso del software.

## Contexto:

El contexto de trabajo es la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica, de la Facultad Regional Haedo de la Universidad Tecnológica Nacional. La misma es de cursado cuatrimestral y se dicta luego de que los

alumnos hayan cursado Análisis Matemático I y II y Álgebra, en el segundo año de la carrera Ingeniería Aeronáutica. La característica principal de esta asignatura es ofrecer contenidos teóricos prácticos relacionados con las asignaturas específicas de la carrera, siendo flujo potencial un tema central para el estudio de flujo de fluidos más complicados, que estudiarán en Aerodinámica es la parte de la mecánica de fluidos que estudia los gases en movimiento y las fuerzas o reacciones a las que están sometidos los cuerpos, como el avión, inmersos en él. Esto se debe a que combinaciones de flujos potenciales sencillos permite generar otros patrones de flujo, facilitando así el abordaje de dichos flujos de fluidos más complejos.

## Objetivo

Describir el diseño de actividades sobre regiones en el plano complejo, incorporando el uso del software Mathematica, señalando las habilidades matemáticas y digitales que se pondrían en juego.

## Sobre las habilidades matemáticas y digitales

Varios autores, Hernández Fernández, Delgado Rubí, Fernández de Alaíza, Valverde Ramírez y Rodríguez Hung (1998), Delgado Rubí (1998) aludiendo a Talízina (1984), Zabala (2007), Sánchez (2002), Godino (2002a), Nickerson, Perkins y Smith (1987), hablan de procedimientos como los modos de actuación, de un saber hacer, de contenidos procedimentales, de competencia, pensamiento hábil. Es conveniente distinguir los conceptos de procedimiento y habilidad vinculados a la Matemática. Por una parte, el procedimiento es la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la Matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado. En general, una habilidad permite

realizar adecuadamente otras actividades jerárquica y/o lógicamente asociadas.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de *Objetivos Educativos*, que categoriza y ordena habilidades de pensamiento y el proceso del aprendizaje. Parte de Habilidades de Pensamiento de Orden Inferior y va hacia Habilidades de Pensamiento de Orden Superior; que abarcan las categorías conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación (Churches, 2009). En los años 90, Lorin Anderson, revisó la Taxonomía de Bloom y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría y el cambio de la secuencia de éstas dentro de la taxonomía. Éstas incluyen recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.

Por otro lado El Consorcio de Habilidades Indispensables para el Siglo XXI, respalda la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) dentro del proceso de enseñanza aprendizaje. Define el alfabetismo en TIC como el uso de herramientas del Siglo XXI en la aplicación de las habilidades de aprendizaje y han desarrollado los llamados Mapas de Alfabetismo en TIC (Eduteka, 2007). Recomienda un modelo educativo para el aprendizaje en el Siglo XXI, que incluyen Materias básicas, Habilidades de aprendizaje, Herramientas, Contexto, Contenido y Evaluación.

Las habilidades antes mencionadas comprenden tres categorías amplias con sus respectivas subcategorías. Habilidades de información y comunicación, que incluye información y alfabetismo en medios y habilidades de comunicación. Habilidades de pensamiento y de solución de problemas, que engloba el pensamiento crítico y pensamiento sistémico y la identificación, formulación y solución de problemas. Y por último, las destrezas interpersonales y de autonomía, que abarcan las habilidades interpersonales y de colaboración, como así también autonomía, responsabilidad personal y social y capacidad de adaptación (Eduteka, 2007).

Los investigadores Delgado Rubí, Hernández, Valverde y Rodríguez, profundizaron el estudio de habilidades matemáticas y las han clasificado según su función (1998). Esta clasificación resume las habilidades matemáticas en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y meta-cognitivas. Profundizando cada una de ellas:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (Identificar, Fundamentar, Comparar, Demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (Interpretar, Modelar, Recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (Graficar, Algoritmizar, Aproximar, Optimizar, Calcular)
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (Resolver, Analizar, Explorar)
- Habilidades meta-cognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar).

## Metodología

### Software Wolfram Mathematica

Para el proceso de enseñanza aprendizaje de regiones en el plano complejo se utilizó el software Wolfram Mathematica a través de su plataforma "Wolfram Development Platform" que es de acceso gratuito a través de Internet y que sólo requiere registro a través de una cuenta de mail. De esta manera se puede trabajar en la nube, todos los archivos quedan guardados en un disco virtual y el alumno puede acceder a ellos desde cualquier dispositivo o computadora. Los comandos necesarios para dicho proceso son:

- Definición de variable compleja:  $z = x + I y$
- Parte real de una variable compleja:  $\text{Re}[z]$
- Parte imaginaria de una variable compleja:  $\text{Im}[z]$
- Módulo de una variable compleja:  $\text{Abs}[z]$
- Comando para simplificar expresiones complejas en forma simbólica: "Refine"
- Comando que genera un gráfico de líneas de funciones que dependen de  $x$  e  $y$ , como las regiones en el plano complejo: "ContourPlot"
- Comando para evaluar expresiones complejas en un rango de valores: "Evaluate"

### Diseño actividades sobre regiones en el plano complejo y habilidades matemáticas y digitales involucradas

Las actividades se presentan en diversos registros de representación descritos por Duval (1993). De acuerdo a varios autores, la coordinación de diferentes tipos de registros colabora con la comprensión efectiva e integradora de los conocimientos (Egret, 1989; Duval, 1991, citados en García & Perales, (2006). Y las transformaciones de unas representaciones en otras permiten obtener nueva información, propiedades, y extraer nuevo conocimiento de los objetos, ideas y conceptos representados (Duval, citado

en Macías Sánchez, (2014)). Se diseñaron pensando en las habilidades matemáticas y digitales que estarían involucradas en ellas, a las que se les asignaron códigos para identificarlas. A continuación se exponen las actividades junto a las habilidades con su código correspondiente:

*Actividad 1 (Registro analítico)*

Graficar las regiones del plano representadas por los siguientes conjuntos:

a)  $A = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z)\text{Re}(z) = a \wedge a \in \mathbb{Z}\}$

b)  $B = \{z \in \mathbb{C} / 2\text{Re}(z) + \text{Im}(z) - |2 + 3i| = a \wedge a \in \mathbb{Z}\}$

Verificar los resultados obtenidos.

- Habilidades conceptuales:
  - Definir variable compleja en el software (HC-01-a)
  - Identificar conceptos de parte real e imaginaria y módulo de una variable compleja (HC-01-b)
- Habilidades traductoras:
  - Interpretar la información dada en registro analítico (HT-01-a)
  - Recodificar en registro gráfico utilizando comandos adecuados del software (HT-01-b)
  - Interpretar las salidas brindadas por el software (HT-01-c)
- Habilidades operativas:
  - Graficar utilizando los comandos apropiados de Wolfram Mathematica (HO-01-a)
- Habilidades heurísticas:
  - Analizar la combinación de comandos apropiadas para realizar los gráficos pedidos (HH-01-a)
  - Explorar con el software las diferentes opciones que pueden agregar al comando para graficar regiones del plano para que el gráfico sea lo más claro y preciso posible (HH-01-b)
- Habilidades meta-cognitivas

- Verificar si el gráfico obtenido con el software corresponde a la expresión analítico original (HM-01-a)

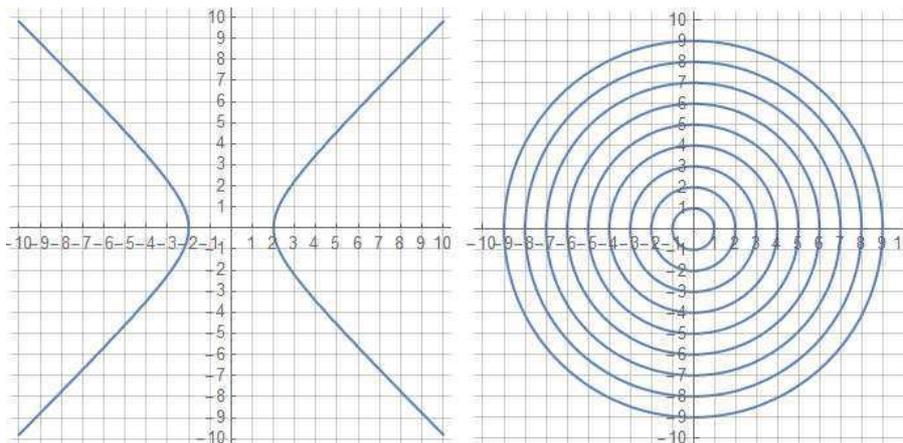


Fig. 1: Gráficos actividad 2

- Habilidades conceptuales:
  - Identificar las regiones en el plano complejo (HC-02-a)
- Habilidades traductoras:
  - Interpretar las regiones en el plano complejo mostradas en los gráficos (HT-02-a)
  - Recodificar a registro analítico las regiones del plano mostradas en los gráficos (HT-02-b)
  - Modelar las regiones en el plano complejo utilizando expresiones analíticas de números complejos (HT-02-c)
- Habilidades meta-cognitivas:
  - Justificar los procedimientos realizados para obtener las expresiones analíticas apropiadas (HM-02-a).

### Actividad 3 (Registro verbal)

- a) Representar gráficamente el conjunto de números complejos cuyo argumento es  $\frac{\pi}{2}$ .

- b) Escribir por comprensión el conjunto de números complejos cuya distancia al origen se mantiene mayor que 2. Justificar el procedimiento realizado.
- Habilidades conceptuales:
    - Identificar concepto argumento de un número complejo (HC-03-a)
    - Identificar concepto módulo de un número complejo (HC-03-b)
  - Habilidades traductoras:
    - Interpretar la información dada en registro verbal (HT-03-a)
    - Recodificar en registro gráfico utilizando comandos adecuados del software (HT-03-b)
    - Interpretar las salidas brindadas por el software (HT-03-c)
    - Recodificar a registro analítico (HT-03-d)
  - Habilidades operativas :
    - Graficar utilizando los comandos apropiados de Wolfram Mathematica (HO-03-a)
  - Habilidades meta-cognitivas :
    - Verificar que el gráfico obtenido con el software corresponde a lo pedido en el enunciado (HM-03-a)
    - Justificar los procedimientos realizados para el gráfico pedido y las expresiones analíticas apropiadas (HM-03-b)

### **Evidencias de las habilidades matemáticas y digitales usando el software**

Con el fin de poner en evidencia las habilidades matemáticas y digitales, se muestra a continuación la solución utilizando el software y las particularidades requeridas para mejor aprovechamiento del mismo. Pueden verse los procedimientos con el software y su relación con las habilidades matemáticas y digitales indicadas en el apartado anterior y las evidencias en el software por cada una de las actividades.

#### *Actividad 1*

Definir una variable compleja, usando el símbolo apropiado para distinguir la unidad imaginaria:  $z := x + i y$  (Fig. 2) (HC-01-a).

$$z := x + i y$$

Fig. 2: Ingreso variable compleja

Identificar los comandos parte real e imaginaria de una variable compleja e

**Refine[Im[z] Re[z], x ∈ Reals  
&& y ∈ Reals] == a  
x y == a**

Fig. 3: Comando Refine

interpretar el significado de  $\text{Im}(z)$   $\text{Re}(z) = a$ , para lo que es necesario aclarar que las variables  $x$  e  $y$  son reales (Fig. 3). (HC-01-b) (HT-01-a).

Graficar las diferentes curvas, analizando y explorando combinaciones apropiadas de comandos para obtener gráficos claros y precisos (Fig. 4). (HT-01-b) (HO-01-a) (HH-01-a) (HH-01-b).

En este momento se puede interpretar el gráfico y verificar si las curvas son las expresadas analíticas. (HM-01-a). Por ejemplo podría verificarse que las curvas  $x y = 1$ ,  $x y = -1$  están en el gráfico obtenido.

```
ContourPlot[Evaluate[{{Im[z] Re[z] == a} /. a -> Range[-13, 13, 2]}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, Axes -> True, AxesStyle -> Thick, Frame -> False, ContourStyle -> Red, GridLines -> {Range[-10, 10], Range[-10, 10]}, Ticks -> {Range[-10, 10], Range[-10, 10]}, GridLinesStyle -> Dashed, ImageSize -> Medium]
```

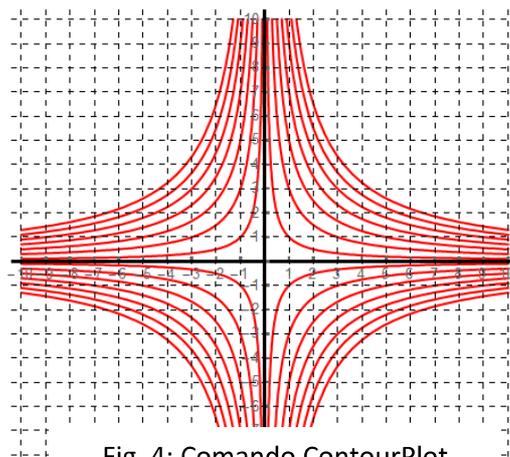


Fig. 4: Comando ContourPlot

### Actividad 2

Observar los gráficos e identificar que las curvas son una hipérbolas y que pasan por los puntos (2,0) y (-2,0) (para punto a) y circunferencias concéntricas en (0,0) (para punto b),

$$A = \{z \in \mathbb{C} / (\text{Re}(z))^2 - (\text{Im}(z))^2 = 4\} \text{ ó } A = \{z \in \mathbb{C} / \frac{(\text{Re}(z))^2}{4} - \frac{(\text{Im}(z))^2}{4} = 1\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2 = a \wedge a \in \mathbb{Z}\}$$

Fig. 5: Conjuntos actividad 2

y escribir las expresiones correspondientes (Fig. 5). (HC-02-a) (HT-02-a) (HT-02-b) (HT-02-c).

Justificar las razones que lo llevaron a escribir estos conjuntos, que tienen que ver con la observación de los gráficos y la identificación de hipérbolas y circunferencias. También podrían verificar gráficamente que las regiones propuestas corresponden a los gráficos dados (Fig. 6) (HM-02-a).

```
ContourPlot[x2 - y2 == 4, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  Axes → True, Frame → False,
  GridLines → {Range[-10, 10], Range[-10, 10]},
  Ticks → {Range[-10, 10], Range[-10, 10]}]
```

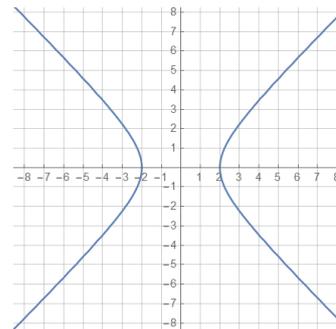


Fig. 6: Gráfico actividad 2

### Actividad 3

```
ContourPlot[Arg[z] == π/4, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  Axes → True, AxesStyle → Thick,
  Frame → False,
  ContourStyle → Blue,
  GridLines → {Range[-10, 10], Range[-10, 10]},
  Ticks → {Range[-10, 10], Range[-10, 10]},
  GridLinesStyle → Dashed]
```

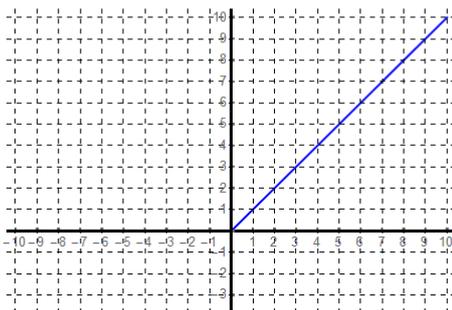


Fig. 7: Gráfico actividad 3

(Fig. 8).  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$   
Fig. 8: Conjunto actividad 03-d)

Interpretar la información dado en palabras para escribirla como comandos para graficar la región y las salidas brindadas por el software (Fig. 7). (HC-03-a) (HT-03-a) (HT-03-b) (HT-03-c) (HO-03-a)

Para el ítem 2, recordar la interpretación geométrica del módulo de una variable compleja y entender la información en palabras para escribirla como un conjunto de variable compleja (HC-03-b) (HT-03-a) (HT-03-b)(HT-

## Reflexiones sobre el diseño

La incorporación del software en actividades matemáticas invita a pensar en diferentes formas de aproximarnos al conocimiento, en diversas opciones para diseñar las actividades destinadas al proceso de enseñanza aprendizaje de regiones en el plano complejo.

En primer lugar, requiere que el docente conozca cabalmente el software, su sintaxis y comandos, y las formas de expresión y salidas que el mismo ofrece. Esto contribuye a anticipar posibles dificultades a las que los alumnos podrían enfrentarse.

También asiste en el diseño de las actividades pues es preciso tener en cuenta las características del software. Por ejemplo, en este caso en particular, dado que el software trabaja con números o variables complejos, es preciso indicar que tanto las variables  $x$  como  $y$  pertenecen al conjunto de los reales. Esto está presente en la evidencia mostrada en el comando "*Refine*".

Por otro lado es preciso conocer los comandos adecuados para graficar este tipo de regiones en el plano complejo, y la combinación de diversas opciones para que el gráfico obtenido sea claro, preciso y refleje las expresiones dadas en forma analítica de la manera más fiel posible. En las evidencias del software puede verse que el comando "*ContourPlot*" está presentado con una serie de opciones que personalizan la región a graficar, los colores y grosores con lo que quiere visualizarse, los ejes, la cuadrícula del gráfico y las marcas sobre los ejes.

Asimismo es necesario conocer la combinación de este comando con el correspondiente a la variación de parámetros, comando "*Evaluate*", el cual es útil para generar una familia de curvas.

Con respecto al diseño pensando en las habilidades matemáticas, es necesario considerar que las mismas adquieren una nueva dimensión al realizarse utilizando un software. Por ejemplo, no es lo mismo graficar en lápiz y papel que en el software, se requieren conocer y utilizar diferentes

recursos y conocimientos. Estas habilidades matemáticas se dan en conjunto con las habilidades digitales, pues las primeras están enmarcadas en el uso de este software en particular.

## Conclusiones

La presentación de este diseño y evidencias de habilidades matemáticas y digitales, permite escribir algunas conclusiones relativas al diseño de actividades destinadas al proceso de enseñanza aprendizaje.

Diseño cuidadoso de las actividades de enseñanza aprendizaje que incluyan uso del software, para que no sea una mera utilización del mismo con el sólo fin de afirmar que se usa tecnología en el aula.

Conocimiento profundo del software a utilizar para minimizar dificultades de uso por parte de los alumnos y de obtención de salidas o resultados inesperados.

Considerar las habilidades matemáticas y digitales que se pretenden desarrollar, para que el diseño de la actividad se apropiado a las mismas; tratando de incluir habilidades de orden superior como las meta-cognitivas.

Adaptar el concepto de mejora continua, ya que estos diseños no están acabados, merecen una evaluación y mejora continua, tanto con respecto al uso del software como a las habilidades matemáticas y digitales.

## Bibliografía

Churches, A. (2009). *Taxonomía de Bloom para la Era Digital*. Recuperado el 2018, de Eduteka: <http://cor.to/1GgQ>

Delgado Rubí, J. (1998). Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento. En R. M. (Ed.), *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 88-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A.

Duval, R. (1993). Registres de présentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.

- EduTEKA. (2007). *Mapa de alfabetismo en TIC: Matemáticas*. Recuperado el 2018, de <http://cor.to/L5wG>
- García, J. & Perales, F. (2006). ¿Cómo usan los profesores de Química las representaciones semióticas? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 5(2), 247-259.
- Godino, J. D. (2002a). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, 9-19.
- Hernández Fernández H, Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B, Valverde Ramírez L, Rodríguez Hung T. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática*. Rosario: Serie Educación: Homo Sapiens Ediciones.
- Macías Sánchez, J. (2014). Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa. Conect@2*, 4(9), 27-57.
- Nickerson, R., Perkins, D. y Smith, E. (1987). *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual*. Barcelona: Paidós. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 4(1).
- Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En E. M. C. Coll, *El constructivismo en el aula* (18va ed., págs. 125-161). Barcelona: GRAÓ.